

## Αμέσως Ολοκληρώσιμες Δ.Ε - Ολοκληρωτικοί Παράγοντες Δ.Ε

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (MSc)

### Άσκηση 1

Να επιλυθεί το π.α.τ

$$(E) \frac{2xy}{x^2+1} - 2x - (2 - \ln(x^2+1))y' = 0, \quad y(5) = 0$$

και να βρεθεί το μέγιστο διάστημα ορισμού των λύσεών του.

### Άσκηση 2

Ας είναι  $a, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta \in \mathbb{R}$ . Αποδείξτε ότι η διαφορική εξίσωση

$$(E) (ax^2 + \beta xy + \gamma y^2)dx + (\delta x^2 + \epsilon xy + \zeta y^2)dy$$

είναι αμέσως ολοκληρώσιμη (ή πλήρης) αν και μόνο αν  $\beta = 2\delta$  και  $\epsilon = 2\gamma$ . Αν  $a = 3$ ,  $\gamma = 1$ ,  $\delta = \zeta = 0$  και η εξίσωση (E) είναι πλήρης, να τη λύσετε. Στη συνέχεια, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθείς ή Ψευδής.

- (i) Υπάρχει λύση  $y$  της εξίσωσης ώστε  $y(0) = 2024$ .
- (ii) Δεν υπάρχουν μονότονες λύσεις της εξίσωσης στο  $[0, +\infty)$ .

### Άσκηση 3

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3 + 2xy^2 + 1)}{x + 3y^2}.$$

Εξετάστε την αλήθεια της πρότασης:

«Υπάρχουν δύο λύσεις της εξίσωσης που να ικανοποιούν την αρχική συνθήκη  $y(0) = 0$ »

### Άσκηση 4

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(x+y+1)}{x(x+3y+2)}$$

Στη συνέχεια, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Αληθείς ή Ψευδής.

- (i) Υπάρχει τελικά σταθερή λύση  $y$  της εξίσωσης.
- (ii) Υπάρχει μη μηδενική λύση της εξίσωσης η οποία είναι αύξουσα και φραγμένη.

### Άσκηση 5

Για τη διαφορική εξίσωση

$$[y + x(x^2 + y^2)^2]dx + [y(x^2 + y^2)^2 - x]dy = 0$$

να βρείτε έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής  $\rho(x, y) = (x^2 + y^2)^m$ , όπου  $m \in \mathbb{Z}$ .

### Άσκηση 6

(i) Αν για τυχαία διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

η  $\phi = \frac{Q_x - P_y}{P - Q}$  είναι συνάρτηση του  $u = x + y$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\rho(u) = e^{\int \phi(u)du}$ , με  $u = x + y$  είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης (E).

(ii) Δείξτε ότι η εξίσωση (E)  $3(x^2 + xy^2 + 2y^3)y' + 5x^2 + 2xy + 3y^3 = 0$  έχει ολοκληρωτικό παράγοντα.

(iii) Δείξτε στο (ii) ότι η διαφορική εξίσωση έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής  $\rho(x, y) = x^\kappa + y^\lambda + \mu xy$ , με  $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ .

### Άσκηση 7

(i) Αν για τυχαία διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

η  $L = \frac{y^2(P_y - Q_x)}{xP + yQ}$  είναι συνάρτηση του  $z = x/y$ , να δείξετε ότι η συνάρτηση  $\rho(z) = e^{\int L(z)dz}$ , με  $z = x/y$  είναι ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης (E).

(ii) Δείξτε ότι η εξίσωση (E)  $(2x + y)dx - xdy = 0$  έχει ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\rho(x, y) = e^{\kappa \frac{y}{x}}, \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

(iii) Να επιλύσετε (με οποιοδήποτε τρόπο θέλετε) την εξίσωση του ζητήματος (ii).

(iv) Υπάρχει λύση της εξίσωσης του του ζητήματος (ii) η οποία να είναι συγκλίνουσα, όταν το  $x \rightarrow +\infty$ ;

### Άσκηση 8

Να επιλυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$(x^2 + xy^2)y' - 3xy + y^3 = 0$$

αφού πρώτα βρεθεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας αυτής της μορφής  $\rho(x, y) = x^n \phi(y)$ , όπου  $n$  κατάλληλος φυσικός αριθμός και  $\phi$  κατάλληλη συνάρτηση.